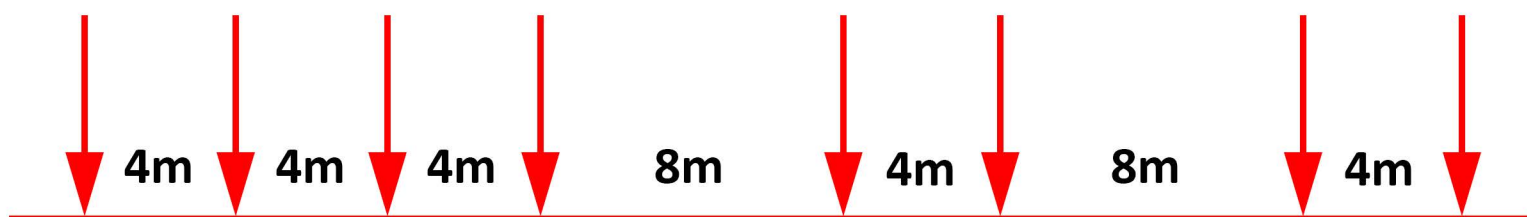




Structuri static determinate acționate de încărcări mobile



STRUCTURI STATICE DETERMINATE ACȚIONATE DE ÎNCĂRCĂRI MOBILE

I. Pentru grinda simplu rezemată din fig.1, pe care se deplasează convoiul de sarcini mobile indicat, se cer următoarele:

- Determinarea reacțiunii V_A maxime.
- Determinarea forței tăietoare maxime din secțiunea „i” pe cale analitică.

- Determinarea momentului încovoietor maxim din secțiunea „i”
- pe cale analitică
- pe cale grafică.

- Determinarea momentului încovoietor maximum maximorum.
- Determinarea valorilor maxime pentru V_A , T_1 , M_1 și a valorii $M_{max,max}$. folosind încărcările echivalente.

II. Pentru grinda Gerber din fig.2 se cer următoarele:
a. Trasarea pe cale cinematică a liniilor de influență ale reacțiunilor și eforturilor secționale indicate (a sau b).

Notă. La fiecare linie de influență se vor determina toate valorile numerice ale ordonatelor caracteristice.

- Determinarea reacțiunilor și eforturilor secționale maxime pentru care s-au trasat liniile de influență, considerând că pe grindă se deplasează convoiul de sarcini mobile indicat în fig.1 (pentru grinda simplu rezemată). Se vor folosi încărcările echivalente și se vor calcula valorile maxime pozitive și negative pentru fiecare reacțiune sau efort secțional.

III. Pentru cadrul din fig.3, se cer următoarele:

- Trasarea liniilor de influență pentru reacțiunile și eforturile secționale indicate.
- Determinarea valorilor maxime (pozitive și negative) ale reacțiunilor și eforturilor secționale pentru care s-au trasat liniile de influență, considerând că pe cadre se deplasează convoiul de sarcini mobile indicat în fig.1 și folosind încărcările echivalente.

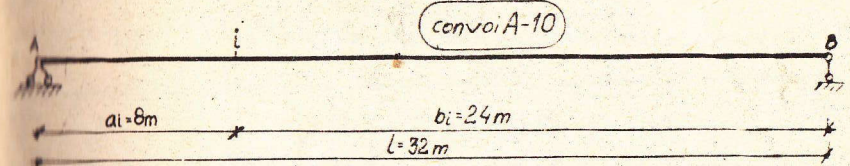


Fig.1.

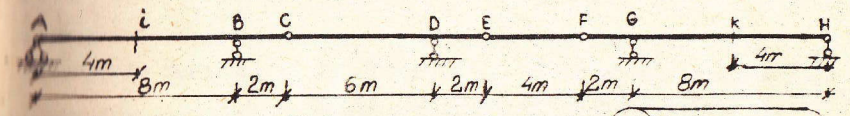


Fig.2.

- V_A, V_D, M_B, T_C, M_K
- V_B, V_H, M_C, T_E, T_K

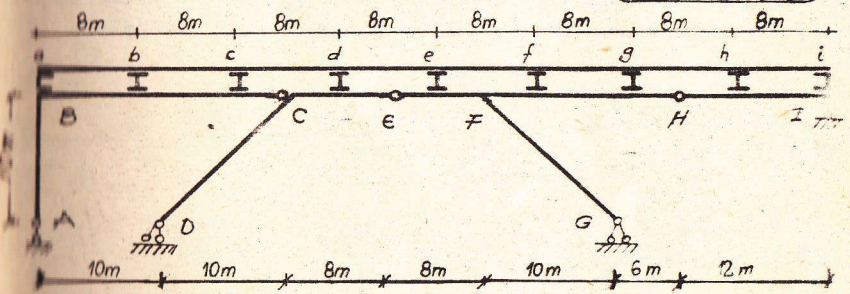


Fig.3.

- V_D, M_H

REZOLVAREA

I. Grinda simplu rezemată (fig.1)

Conform STAS 3221/1972 (Anexa A.1) convoiul de autocamioane A-10 are alcătuirea din fig.4.

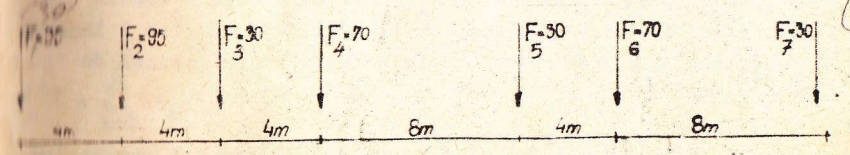


Fig.4.

Valorile încărcărilor sînt următoarele:

$$F_1 = P'_1 = 3,5 \text{ tf} = 35 \text{ kN}$$

$$F_2 = P'_2 = 9,5 \text{ tf} = 95 \text{ kN}$$

$$F_3 = F_5 = F_7 = \dots = P'_7 = 3 \text{ tf} = 30 \text{ kN}$$

$$F_4 = F_6 = F_8 = \dots = P'_8 = 7 \text{ tf} = 70 \text{ kN}$$

Notă. Convoiu se consideră de lungime infinită (se continuă perechile de forțe de 30 kN și 70 kN la aceeași distanță).

a. Determinarea reacțiunii V_A maxime

1. Se trasează linia de influență a reacțiunii V_A .

Folosind salea cinematică, se determină diagrama deplasărilor pe verticală pentru mecanismul din fig.5 b, iar scara liniei de influență rezultă din ecuația de lucru mecanic virtual:

$$-V_A \cdot \delta V_A + 1 \cdot \delta X = 0$$

de unde:

$$V_A = \frac{1 \cdot \delta X}{\delta V_A}$$

cu condiția de scară:

$$\delta V_A = 1 \text{ (fig.5 c).}$$

2. Folosind suprapunerea efectelor, pentru orice poziție a convoiului pe grindă reacțiunea V_A are expresia de calcul:

$$V_A = \sum_{k=1}^n v_{Ak} F_k$$

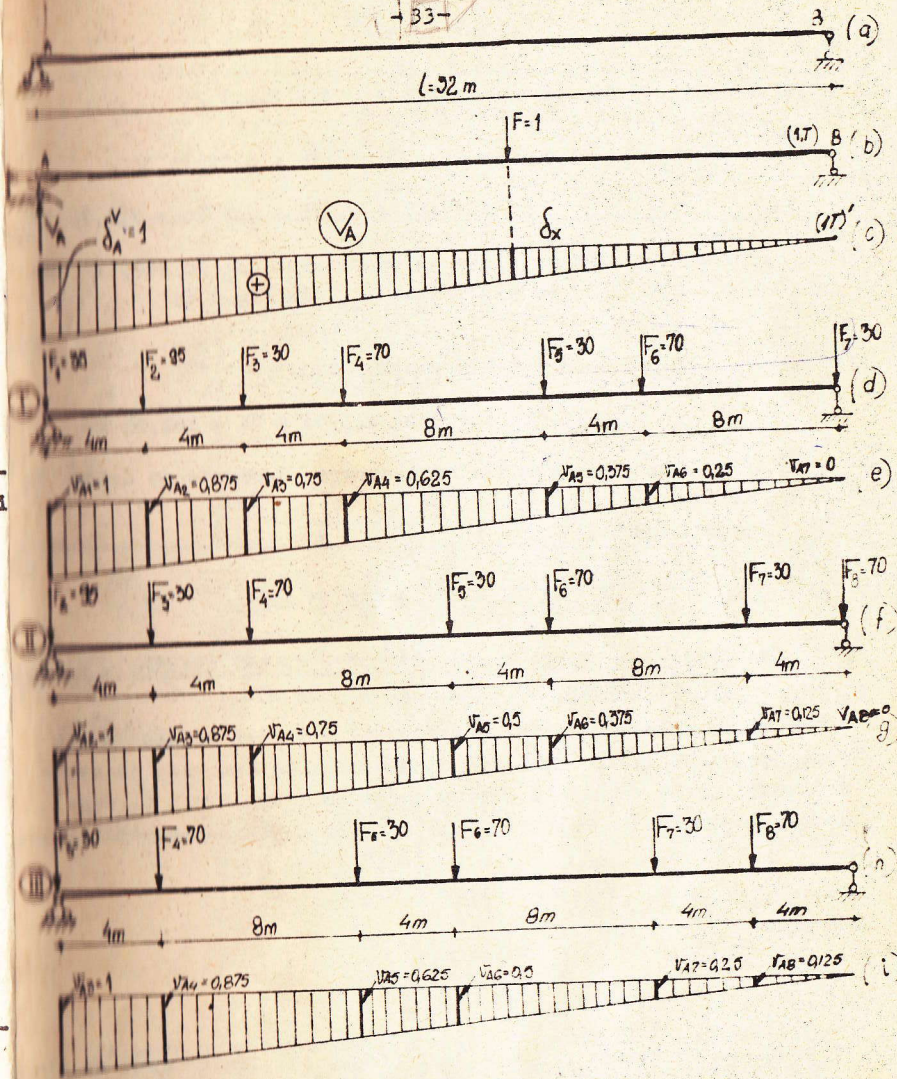
unde F_k = încărcări din convoi, v_{Ak} = ordonata din linia de influență în dreptul fiecărei forțe F_k .

În consecință, valoarea maximă a reacțiunii V_A se determină prin încercări, considerînd convoiul de sarcini mobile în cîteva poziții caracteristice, de fiecare dată cu cîte o încărcare pe reazemul A, în dreptul cărui ordonata v_{Ak} a liniei de influență este maximă.

Astfel:

- pentru poziția I a convoiului (F_1 în dreptul reazemului A - fig.5 d), folosind ordonatele v_{Ak} ale liniei de influență din fig.5 e, rezultă:

Fig. 5.



$$V_A(I) = \sum_{k=1}^7 v_{Ak} F_k = 1 \times 35 + 0,875 \times 95 + (0,75 + 0,375 + 0) \times 30 + (0,625 + 0,25) \times 70 = 213,125 \text{ kN}$$

- pentru poziția a II-a a convoiului (F_2 în dreptul reaze-

mului A - fig. 5 f), cu ordonatele v_{Ak} din fig.5 g:

$$V_A^{(II)} = \sum_{k=2}^8 v_{Ak} F_k = 1 \times 95 + (0,875 + 0,50 + 0,125) \times 30 + (0,75 + 0,375 + 0) \times 70 = 218,75 \text{ kN}$$

- pentru poziția a III-a a convoiului (F_3 în dreptul rezemului A - fig.5 h), cu ordonatele v_{Ak} din fig.5 i:

$$V_A^{(III)} = \sum_{k=3}^8 v_{Ak} F_k = (1 + 0,625 + 0,25) \times 30 + (0,875 + 0,50 + 0,125) \times 70 = 161,25 \text{ kN}$$

Alte încercări nu mai sînt necesare, deoarece nu conduc la valori mai mari.

Rezultă deci:

$$V_{A(max)} = V_A^{(II)} = 218,75 \text{ kN}$$

b. Determinarea pe cale analitică a forței tăietoare maxime din secțiunea „1” ($a_1 = 8 \text{ m}$, $b_1 = 24 \text{ m}$)

1. Se trasează linia de influență a forței tăietoare din secțiunea „1”, folosind calea cinematică: se trasează diagrama deplasărilor pe verticală pentru mecanismul din fig.6 b, scara liniei de influență rezultînd din ecuația de lucru mecanic virtua

$$- T_1 \cdot \delta_1^S - T_1 \cdot \delta_1^d \pm 1 \cdot \delta_x = 0$$

de unde:

$$T_1 = \pm \frac{1 \cdot \delta_x}{\delta_1^S + \delta_1^d}$$

cu condiția de scară: $\delta_1^S + \delta_1^d = 1$ (fig.6 c); ținînd cont de elementele geometrice date, rezultă: $\delta_1^S = 0,250$, $\delta_1^d = 0,750$.

2. Folosind suprapunerea efectelor, mărimea forței tăietoare T_1 pentru o poziție oarecare a convoiului de sarcini mobile pe grindă se poate scrie:

$$T_1 = \sum_{k=1}^n t_{1k} \cdot F_k$$

t_{1k} fiind ordonatele din linia de influență din dreptul forțelor

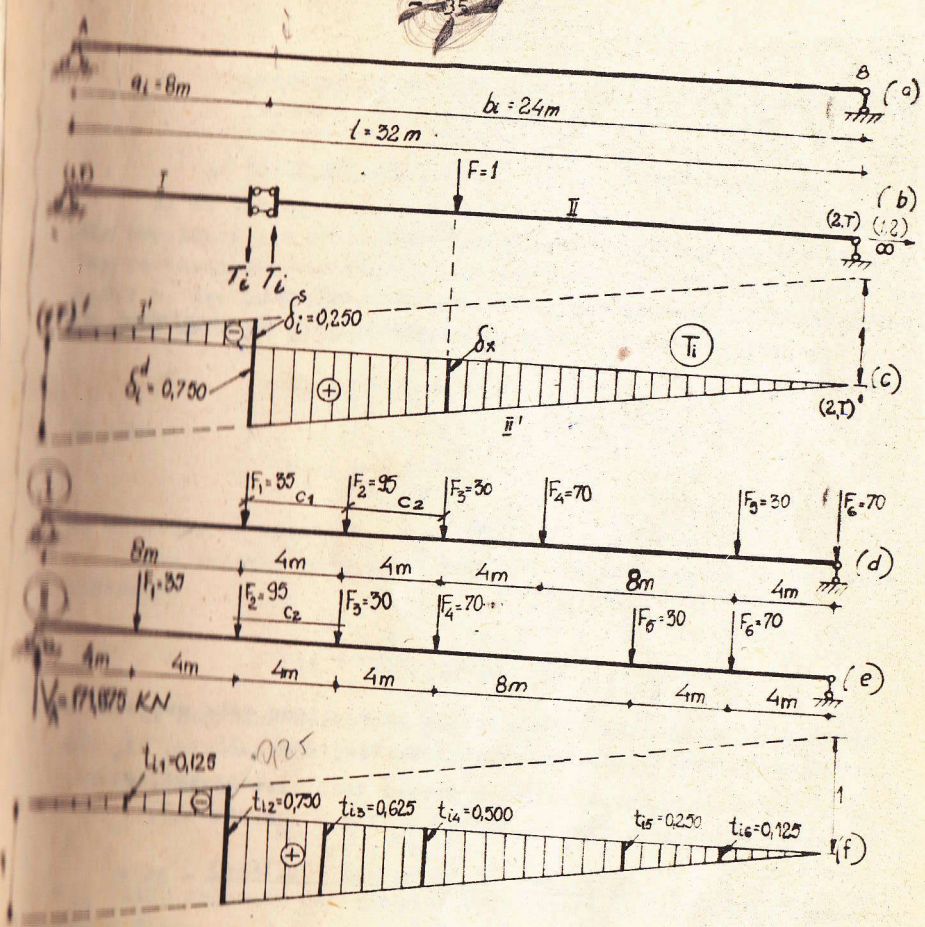


Fig. 6.

Pe baza relației scrise, pozițiile posibile de forță tăietoare maximă ale convoiului sînt cele pentru care o sarcină din convoi se află în dreptul secțiunii (infinit vecin în dreapta), sarcina îi corespunde ordonata maximă a liniei de influență. Astfel:
- pentru poziția I a convoiului (F_1 în secțiunea „1” - fig.

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{95}{8} = 8,75$$

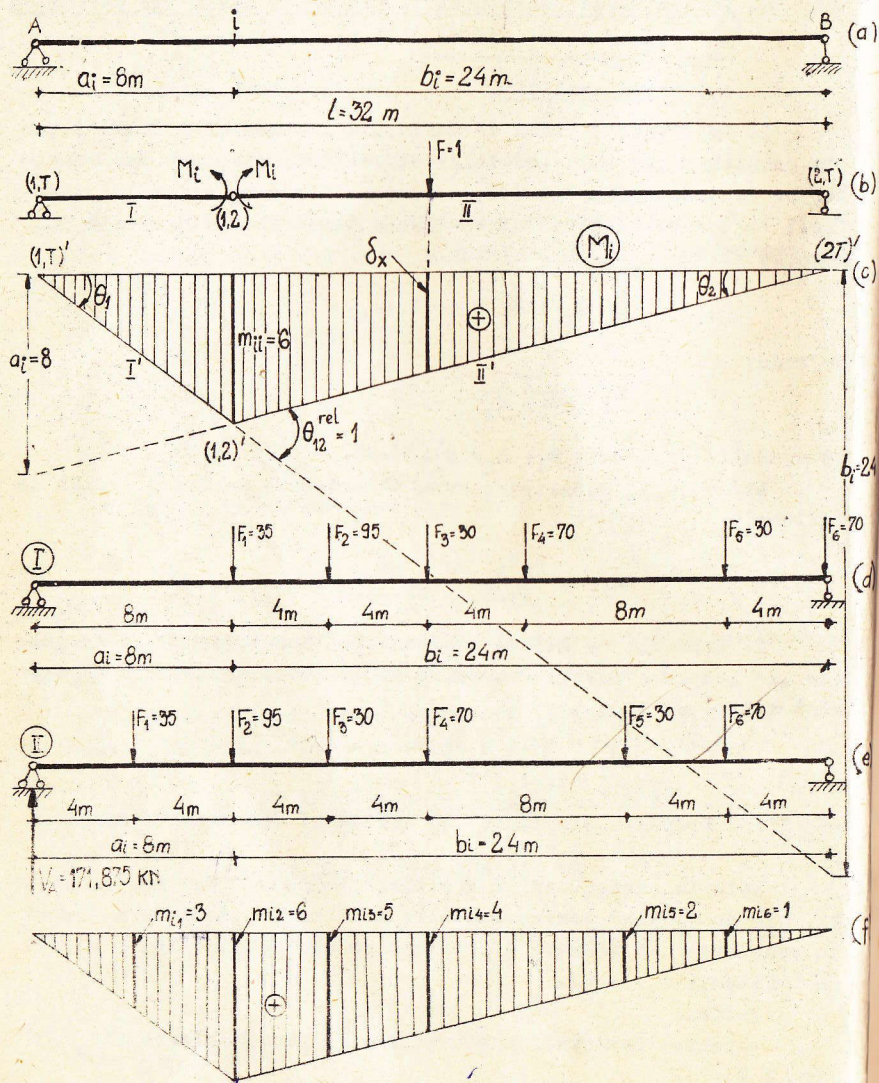


Fig. 7.

$$p = \frac{\sum_{k=1}^6 F_k}{l} = \frac{330}{32} = 10,3125$$

$$p_b = \frac{\sum_{k=1}^6 F_k}{b_1} = \frac{330}{24} = 13,75$$

Rezultă deci:

$$p_a = 4,375 < p = 10,3125 < p_b = 13,75$$

ceea ce indică necesitatea deplasării convoiului de sarcini spre stînga, cu mărimea $a_1 = 4$ m;

= pentru poziția a II-a a convoiului (F_2 în secțiunea „I” -

Fig. 7 e):

$$p_a = \frac{\sum_{k=1}^2 F_k}{a_1} = \frac{130}{8} = 16,25$$

$$p = \frac{\sum_{k=1}^6 F_k}{l} = \frac{330}{32} = 10,3125$$

$$p_b = \frac{\sum_{k=2}^6 F_k}{b_1} = \frac{295}{24} = 12,2917$$

Rezultă deci:

$$p_a = 16,25 > p = 10,3125 < p_b = 12,2917$$

ceea ce indică faptul că poziția a II-a este cea care corespunde momentului încovoietor maxim în secțiunea „I”.

3. Calculul valorii maxime a momentului M_1 se face fie obișnuit (încălcări fixe în poziția a II-a):

$$M_1(\max) = V_A \cdot a_1 - F_1 \cdot c_1 = 171,875 \times 8 - 35 \times 4 = 1235 \text{ kNm},$$

fie folosind coeficienții de influență din fig. 7 f):

$$M_1(\max) = \sum_{k=1}^6 m_{1k} F_k = 3 \times 35 + 6 \times 95 + (5 + 2) \times 30 + (4 + 1) \times 70 = 1235 \text{ kNm}$$

o₂) Calea grafică

1. Se aleg următoarele scări:

$\frac{8}{32} = \frac{171,875}{24}$

$$\frac{\sum_{k=1}^6 F_k}{l} = \frac{330}{32} = 10,3125$$

Se obține deci:

$$\frac{F_1}{c_1} = 8,75 < \frac{\sum_{k=1}^6 F_k}{l} = 10,3125$$

deci convoiul trebuie deplasat cu c_1 spre stînga;

- pentru poziția a II-a a convoiului (F_2 în secțiunea „1” fig.6 e):

$$\frac{F_2}{c_2} = \frac{95}{4} = 23,75$$

$$\frac{\sum_{k=1}^6 F_k}{l} = \frac{330}{32} = 10,3125$$

Intrucît se obține deci:

$$\frac{F_2}{c_2} = 23,75 > \frac{\sum_{k=1}^6 F_k}{l} = 10,3125$$

rezultă că poziția convoiului cu F_2 în secțiune este cea care corespunde forței tăietoare maxime din secțiunea „1”.

3. Se calculează valoarea forței tăietoare maxime, fie obîgnuit (încărcări fixe - poziția a II-a a convoiului):

$$\begin{aligned} T_{1(\max)} &= V_A - F_1 = \frac{35 \times 28 + 95 \times 24 + 30(28+8) + 70(16+4)}{32} - 35 = \\ &= 171,875 - 35 = 136,875 \text{ kN} \end{aligned}$$

fie utilizînd suprapunerea efectelor și coeficienții de influență (fig.6 f):

$$\begin{aligned} T_{1(\max)} &= \sum_{k=1}^6 \pm t_{1k} \cdot F_k = -0,125 \times 35 + 0,750 \times 95 + \\ &+ (0,625 + 0,250) \times 30 + (0,500 + 0,125) \times 70 = 136,875 \text{ kN} \end{aligned}$$

e. Determinarea momentului încovoietor maxim din secțiunea „1” ($a_1 = 8 \text{ m}$, $b_1 = 24 \text{ m}$)

a₁) Calea analitică

1. Se trasează linia de influență a momentului încovoietor din secțiunea „1” folosind calea cinematică: diagrama deplasărilor pe verticală din fig.7 c, corespunzătoare mecanismului din fig.7 b, devine linie de influență pentru scara determinată din situația de lucru mecanic virtual:

$$-M_1 \theta_1 - M_1 \theta_2 + l \cdot \delta x = 0$$

de unde:

$$M_1 = \frac{l \cdot \delta x}{\theta_1 + \theta_2}$$

cu condiția de scară: $\theta_1 + \theta_2 = \theta_{12}^{\text{rel}} = 1$.

Din relații geometrice rezultă ordonata maximă a liniei de influență

$$m_{11} = \frac{a_1 b_1}{l} = \frac{8 \times 24}{32} = 6$$

2. Expresia de calcul a momentului încovoietor din secțiunea „1” pentru o poziție oarecare pe grindă a convoiului de sarcini mobile este:

$$M_1 = \sum_{k=1}^n m_{1k} F_k$$

m_{1k} fiind ordonata din linia de influență din dreptul fiecărei forțe F_k .

Relația scrisă indică efectuarea încercărilor pentru poziții ale convoiului corespunzătoare cîte unei sarcini din convoi în secțiunea „1” (căreia îi corespunde ordonata maximă a liniei de influență $m_{11} = 6$).

Astfel:

- pentru poziția I a convoiului (F_1 în secțiunea „1” -

fig. 7 d):

$$P_0 = \frac{l}{a_1} F_k = \frac{35}{8} = 4,375$$

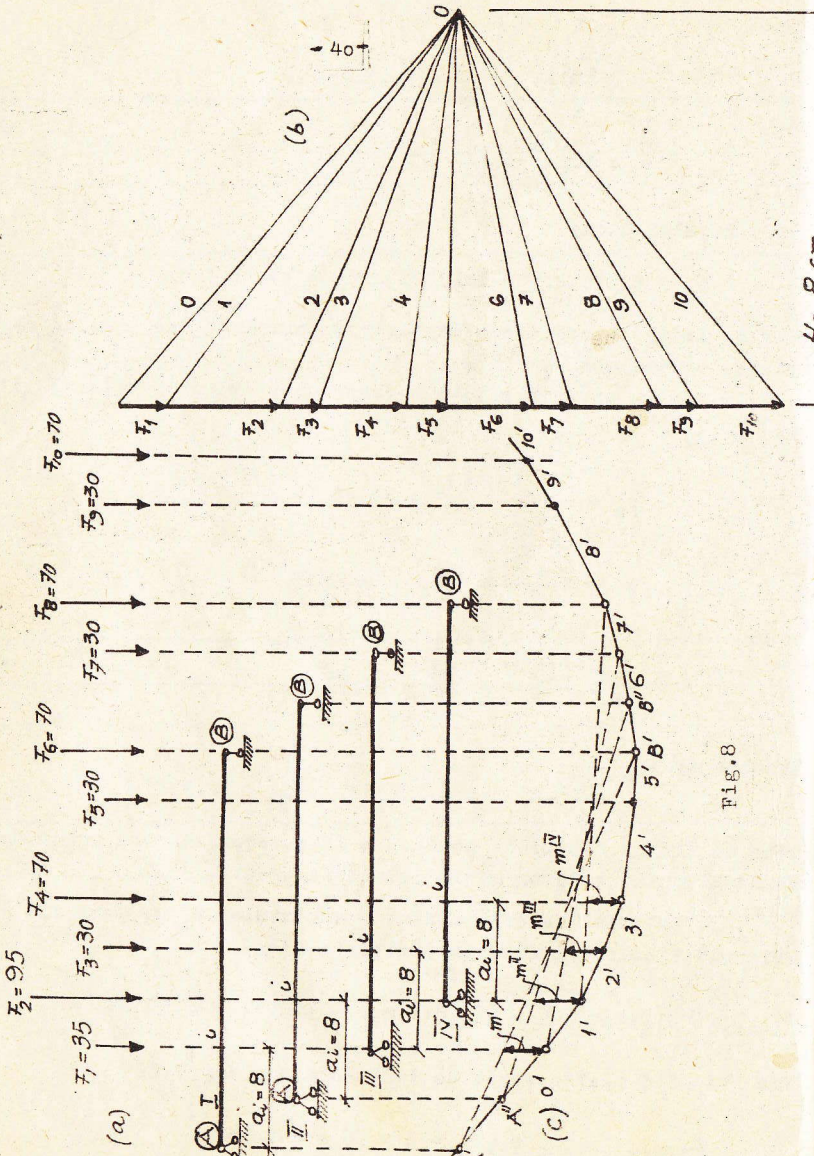


Fig.8

Fig.8.

$$P_B = \frac{\sum_{k=1}^n F_k}{a_1} = \frac{36}{16} = 2,1875$$

$$P = \frac{\sum_{k=1}^n F_k}{c} = \frac{230}{32} = 7,1875$$

= scara lungimilor :

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{400} \quad (1 \text{ cm} = 400 \text{ cm})$$

= scara forțelor:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{40} \quad (1 \text{ cm} = 40 \text{ kN})$$

3. Se construiește poligonul forțelor din fig.8 b, alegând distanța polară $H = 8 \text{ cm}$.
4. Se construiește poligonul funicular din fig.8 c, prin paralelele $o', 1', 2', \dots, 10'$ duse la razele polare $o, 1, 2, \dots, 10$.
5. Se desenează grinda în poziția I (la scara lungimilor), cu secțiunea „I” în dreptul forței F_1 și se duce linia de închidere $A' - B'$ a poligonului funicular pentru această poziție (A' și B' sînt proiecțiile pe poligonul funicular ale reazemelor A și B ai grinzii în poziția I); segmentul m_1^I măsurat între linia de închidere și poligonul funicular este $m_1^I = 0,85 \text{ cm}$.
6. Se procedează la fel pentru pozițiile II (secțiunea „I” în dreptul forței F_2 , linia de închidere a poligonului funicular $A'' - B''$) III (secțiunea „I” în dreptul forței F_3) și IV (secțiunea „I” în dreptul forței F_4) și se determină prin măsurare:

$$m_1^{II} = 0,95 \text{ cm}; \quad m_1^{III} = 0,8 \text{ cm}, \quad m_1^{IV} = 0,6 \text{ cm}$$

7. Știind că momentul încovoietor se determină pe cale grafică pe baza relației:

$$M_1 = m_1 \times H \times n \times f$$

și ținînd cont de scările alese, se obține:

$$M_{1(\max)} = m_1^{\max} \times H \times n \times f = 0,95 \times 8 \times 400 \times 40 = 121600 \text{ kN cm} = 1216 \text{ kNm}$$

4. Momentul încovoietor maximum maximorum

1. Se stabilește poziția convoiului pentru care se produce moment încovoietor maxim în secțiunea de la mijlocul deschiderii:
 - pentru poziția I a convoiului (F_1 în secțiunea de la mijlocul deschiderii - fig.9 a):

$$p_b = \frac{\sum_{k=1}^4 F_k}{b_1} = \frac{230}{16} = 14,375$$

Deci:

$$p_a = 2,1875 < p = 7,1875 < p_b = 14,375$$

ceea ce indică necesitatea deplasării convoiului spre stînga cu $c_1 = 4$ m.

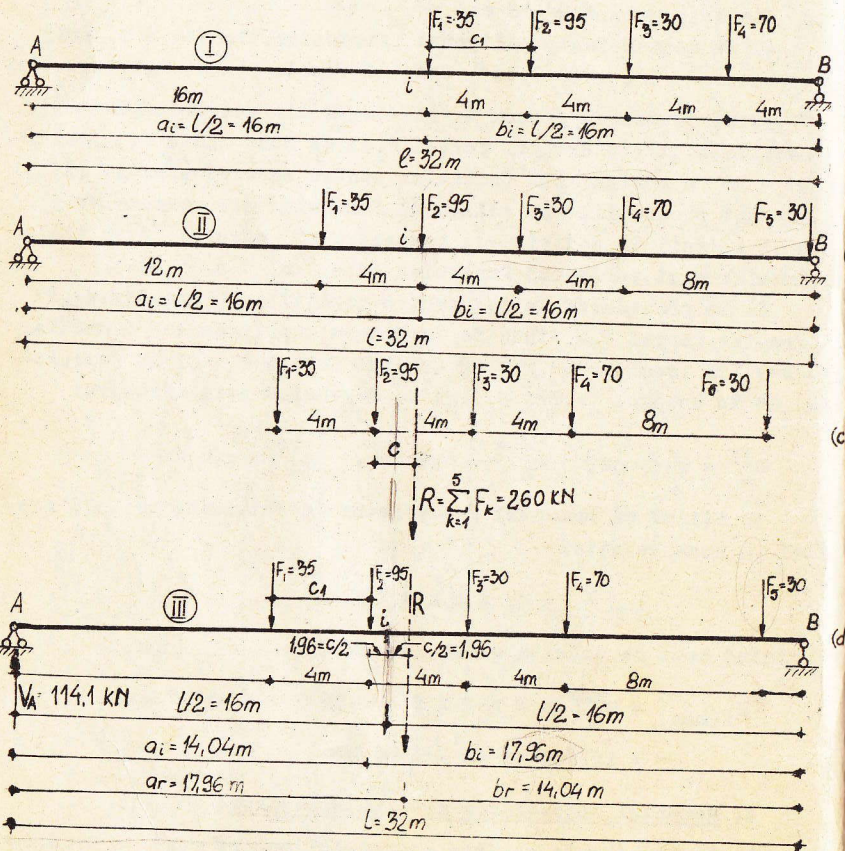


Fig. 9.

- pentru poziția a II-a convoiul (F_2 în secțiune - fig. 9 b; forța F_5 intră pe grindă dar găsindu-se pe rezemul B nu

influențează momentele încovoietoare, deci nu se ia în considerare):

$$p_a = \frac{\sum_{k=1}^2 F_k}{a_1} = \frac{130}{16} = 8,125$$

$$p = \frac{\sum_{k=1}^4 F_k}{l} = \frac{230}{32} = 7,1875$$

$$p_b = \frac{\sum_{k=2}^4 F_k}{b_1} = \frac{195}{16} = 12,1875$$

Deci:

$$p_a = 8,125 > p = 7,1875 < p_b = 12,1875$$

Rezultă că în secțiunea de la mijlocul deschiderii se produce moment încovoietor maxim atunci cînd în această secțiune se găsește forța F_2 din convoi.

2. Se presupune că tot în dreptul forței F_2 se produce și momentul încovoietor maximum maximorum și se determină poziția rezultantei R a celor 5 forțe de pe grindă (se include și forța F_5 , deoarece în etapa următoare convoiul se deplasează spre stînga; deci F_5 nu mai rămîne pe rezemul B); astfel, cu datele numerice din fig. 9 c și utilizînd teorema Varignon în raport cu forța F_1 :

$$\sum_{k=2}^5 F_k \cdot d_k = R(4+c)$$

Deci: $95 \times 4 + 30 \times 8 + 70 \times 12 + 30 \times 20 = 260(4+c)$

de unde rezultă $c = 3,92$ m.

3. Se așează convoiul pe grindă astfel ca să fie îndeplinită condiția de moment încovoietor maximum maximorum în dreptul forței F_2 ; mijlocul deschiderii împarte în două segmente egale distanța $c = 3,92$ m dintre forța F_2 și rezultanta R (poziția III - fig. 9 d).

4. Se verifică dacă în poziția a III-a a convoiului se produce moment maxim în dreptul forței F_2 :

$$p_a = \frac{\sum_{k=1}^2 F_k}{a_1} = \frac{130}{14,04} = 9,2593$$

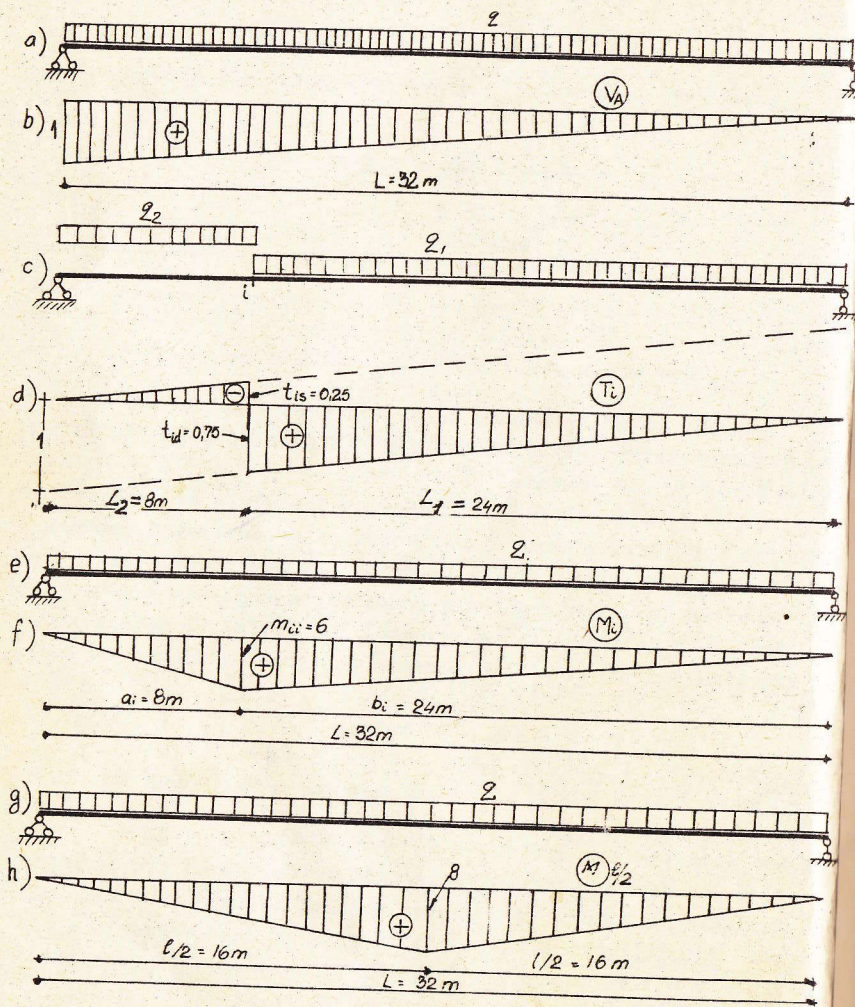


Fig. 10.

$$p = \frac{\sum_{k=1}^5 F_k}{\ell} = \frac{260}{32} = 8,125$$

$$p_b = \frac{\sum_{k=2}^5 F_k}{b_1} = \frac{225}{17,96} = 12,5278$$

Rezultă deci:

$$p_a = 9,2593 > p = 8,125 < p_b = 12,5278$$

asta se confirmă că în poziția a III-a a convoiului se produce $M_{\max, \max}$ în dreptul forței F_2 .

5. Se verifică dacă în dreptul forței F_2 forța tăietoare trece prin zero (fig. 9 e):

$$V_A = \frac{R \cdot b}{\ell} = \frac{260 \times 14,04}{32} = 114,1 \text{ kN}$$

$$T_{(F_2)}^{st} = V_A - F_1 = 114,1 - 35 = 79,1 \text{ kN}$$

$$T_{(F_2)}^{dr} = T_{(F_2)}^{st} - F_2 = 79,1 - 95 = -15,9 \text{ kN}$$

6. Se calculează valoarea momentului încovoietor maximum maximus:

= direct (sarcini fixe în poziția a III-a):

$$M_{\max, \max} = V_A \cdot a_1 - F_1 \cdot o_1 = 114,1 \times 14,04 - 35 \times 4 = 1462 \text{ kNm}$$

= folosind relația de calcul pentru $M_{\max, \max}$ (cazul forței în dreptul căreia se produce M_{\max} în stînga rezultantei):

$$M_{\max} = \frac{R(\ell - o)^2}{4 \times \sqrt{n}} - \sum_{k=1}^{n-1} F_k \cdot d_k = \frac{260(32 - 3,96)^2}{4 \times 32} = 35 \times 4 = 1457 \text{ kNm}$$

Notă. Dacă se calculează momentul considerînd pe F_3 ca forță în dreptul căreia se produce $M_{\max, \max}$, se obține o valoare mai mică: $M = 1430 \text{ kNm}$.

e) Utilizarea încărcărilor echivalente

1. Determinarea reacțiunii maxime V_A

Correspondența liniei de influență din fig. 10 b, încărcînd întreaga grindă cu sarcina distribuită echivalentă, pentru